МЕТОДЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

как эффективные способы решения уравнений и неравенств повышенного уровня сложности

А.М.Лукашёнок, учитель математики квалификационной категории «учитель-методист» ГУО «Борковичская средняя школа Верхнедвинского района»

При решении многих заданий, связанных с уравнениями, неравенствами и различными преобразованиями, очень эффективными являются *методы подстановки (замены переменной) и замены функций.*

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Суть *метода замены переменной* состоит в том, что вводя одну или несколько новых неизвестных (конкретный вид формул замены зависит от условия задания), зачастую можно существенно упростить задание по отношению к его первоначальной формулировке.

Два практических совета

Совет 1. Замену переменных нужно делать сразу, при первой же возможности.

Совет 2. Уравнение относительно новой переменной нужно решать до конца и лишь затем возвращаться к старому неизвестному.

Наиболее часто встречающиеся типы замен

- ***Замена $y = x^n$*** (*степенная замена*).

В частности, с помощью замены $y = x^2$ *биквадратное* уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ приводится к квадратному $ay^2 + by + c = 0$.

- ***Замена многочлена*** *($y=P_n(x)$ или $y=\sqrt{P_n(x)}$)*

1) $\frac{3}{log_2(x^2-8)} > 1$, замена y=$\log_2(x^2–8)$, получаем $\frac{3}{y}>1$.

2) $\sin^2 x-3|\sin x|+2=0$, замена $y=|\sin x|$.

3) $(\underline{x^2+x}+1)\cdot(2x^2+2x-3)\le -3(1-x-x^2)$, замена $t=x^2+x$, $(t+1)\cdot(2t-3)\le -3(1-t)$.

4) $\underline{(x-1)}(x-2)(x-3)\underline{(x-4)}>3$,

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)>3$, замена $t=x^2-5x+4$, получаем $t(t+2)>3$.

5) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2\le 3x+7$, замена $\sqrt{x^2-3x+5}=t\ge 0$, получаем:

$t^2+t-12\le 0$.

6) $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\cdot\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}$, подстановка $a=\sqrt{3}$ и $b=\sqrt[3]{2}$ позволит работать с целыми степенями. Имеем: $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{a^4-b^3a}{a-b}+a^2b\right)\cdot a}}{a^2+\sqrt[6]{a^6b^6}}=\dfrac{\sqrt{a^2\cdot\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}+ab\right)}}{a^2+ab}=\dfrac{a\cdot\sqrt{a^2+2ab+b^2}}{a(a+b)}=1$.

7) $\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{x-2}}}+\sqrt{1+\sqrt{x-2}}=6$, замена $\sqrt{1+\sqrt{x-2}}=t$,

$\sqrt{14+t}+t=6$.

Функция $y=\sqrt{14+t}$ возрастает для $t\ge -14$, $y=t$ – возр. для $t\in R$,

$y=6$–const,=> 1корень, подбором находим $t=2$.Ответ: 11.

8) $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1)$, замена $y=\sqrt{x+1}$, получаем $4x^2+12xy-27y^2=0$. Т.к. $x=-1$ не является корнем уравнения, разделим обе части уравнения на y^2. Получаем $4\left(\frac{x}{y}\right)^2+12\frac{x}{y}-27=0$.

Переменную в некоторых случаях можно рассматривать как параметр:

9) $4^x-(7-x)\cdot 2^x+12-4x=0$, замена $2^x=t$,

$t^2-(7-x)t+12-4x=0$,

$D=(7-x)^2-4(12-4x)=49-14x+x^2-48+16x=x^2+2x+1=(x+1)^2$,

$t_1=\frac{7-x+x+1}{2}=4$, $t_2=\frac{7-x-x-1}{2}=3-x$.

$2^x=4$, $x=2$ или $2^x=3-x$. Функция $y=2^x$ – возрастает на всей области определения, $y=3-x$ – убыв., =>1корень, подбором находим $x=1$.Ответ: 1; 2.

10) $25^x-2(13-x)\cdot 5^x+25-50x=0$, замена $5^x=t$, $t^2-2(13-x)t+25-50x=0$

$\frac{D}{4}$=(13-x)^2-25+50x=169-26x+x^2-25+50x= x^2+24x+144=(x+12)^2

t_1=13-x+x+12=25, 5^x=25, x=2

t_2=13-x-x-12=1-2x, 5^x= 1-2x

Функция $y=5^x$ – возрастает на всей области определения, y=1–2x – убыв.=>1корень, подбором находим x=0. Ответ: 0, 2.

11) $\log_2^2x+(x-1)\cdot\log_2x=6-2x$, замена $\log_2x= t$, $t^2+(x-1)t+2x-6=0$,

$D=x^2-2x+1-8x+24=(x-5)^2$, $t_1=\frac{1-x+x-5}{2}=-2$, $t_2=\frac{1-x-x+5}{2}=-x+3$

$\log_2x=-2$, $x=\frac{1}{4}$ или$\log_2x=3-x$

Функция $y=\log_2x$ – возрастает на всей области определения, y=3–x – убыв. =>1корень, подбором находим x=2. Ответ: $\frac{1}{4}$, 2.

Уравнения вида $\sqrt[m]{ax+b}\pm\sqrt[n]{cx+d}=p$ (здесь a, b, c, d – некоторые числа, m, n – натуральные числа) и ряд других уравнений часто удается решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных: $\sqrt[m]{ax+b}=y$и $\sqrt[n]{cx+d}=z$, гдеу, $z\geq 0$ и последующего перехода к эквивалентной системе рациональных уравнений.

12) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$, замена $y=\sqrt[4]{47-2x}$, $z=\sqrt[4]{35+2x}$, получаем: y + z =4. Найдём ещё одно уравнение: возведём равенства $y=\sqrt[4]{47-2x}$, $z=\sqrt[4]{35+2x}$ в четвёртую степень и заметим, что $y^4+z^4=82$.Итак, надо решить систему:$\begin{cases} y+z=4, \\ y^4+z^4=82. \end{cases}$

Возведением в квадрат получаем:

$y^2+z^2=16-2yz \Rightarrow y^4+z^4=256-64yz+4y^2z^2-2y^2z^2$.

После подстановки t=yz имеем: $2t^2-64t+174=0 \Rightarrow t=3$ или t=29.

$\begin{cases} yz=3, \\ y+z=4. \end{cases}$ Тогда $y_1=1$, $z_1=3$, $y_2=3$, $z_2=1$

$\begin{cases} yz=29, \\ y+z=4. \end{cases}$Нет решений

Остается решить 2 системы

$\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=3, \\ \sqrt[4]{35+2x}=1. \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=1, \\ \sqrt[4]{35+2x}=3. \end{cases}$

Первая из них даёт $x_1=-17$, вторая $x_2=23$.

- **Замена y=$\frac{P_n(x)}{G_m(x)}$** *(дробно-рациональная замена).*

Здесь$P_n(x)$ и $G_m(x)$ − многочлены степеней n и m соответственно.

В частности, с помощью широко распространённой замены $y=x+\frac{1}{x}$ решаются так называемые возвратные уравнения, то есть уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$.

Рассмотрим, как это делается. Так как $a \neq 0$, то число $x = 0$ не является корнем этого уравнения. Разделим уравнение на $x^2 \neq 0$, получим

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0,\ a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)+b\left(x + \frac{1}{x}\right)+ c = 0.$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} =\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, замена $y = x + \frac{1}{x}$, получаем$ay^2 + by + c - 2a=0.$

13) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$

$$\frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^3}{x^2} - \frac{8x^2}{x^2} + \frac{12x}{x^2} + \frac{16}{x^2}=0,$$

$$x^2 - 3x - 8 + \frac{12}{x} + \frac{16}{x^2} = 0,$$

$x^2 + \frac{4^2}{x^2} - 3\left(x - \frac{4}{x}\right) - 8 = 0$, замена $t = x - \frac{4}{x}$.

Получаем $t^2+2\cdot4-3t-8=0$, $t^2-3t=0$.

14) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{45}{16}$

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1} - 2\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1} = \frac{45}{16},$$

$$\left(\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right)^2 - 2\cdot\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{45}{16},$$

$$\left(\frac{x(x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)^2 - 2\cdot\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{45}{16},$$

$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{45}{16}$, замена $\frac{2x^2}{x^2-1} = y$, тогда $y^2 - y - \frac{45}{16} = 0$.

ЗАМЕНА ФУНКЦИЙ

С помощью перехода от одной функции к другой (замены множителей) неравенство сводится к равносильному ему неравенству, легко решаемому методом интервалов. В основе этого преобразования лежит утверждение: ***«Если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции f(x) соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции g(x), то неравенства p(x)f(x)≥0 и p(x)g(x)≥0 равносильны».***

1) ***f(x)= |u(x)|-|v(x)|<=>g(x)=u²(x)-v²(x)***

Пример: $\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|} \le 0$.

Решение

$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2} \le 0, \frac{(3x-2+2x-3)(3x-2-2x+3)}{(x^2+x-8+x^2-x)(x^2+x-8-x^2+x)} \le 0,$

$\frac{5(x-1)(x+1)}{2(x^2-4)\cdot 2(x-4)} \le 0, \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x-4)} \le 0$, далее применяем метод интервалов.

Ответ: (-∞; -2)∪[-1; 1] ∪(2; 4).

2) ***f(x)=$a^{u(x)} - a^{v(x)}$, a>1 <=>g(x)=u(x)-v(x)***

Пример: $\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1} \le 0$.

Решение

$\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0} \le 0, \frac{2x^2+6x-4-(-2x^2-2x+1)}{x-0} \le 0,$

$\frac{4x^2+8x-5}{x} \le 0$, далее применяем метод интервалов. Ответ: (-∞; -2,5]∪(0; 0,5].

3) ***f(x)=$\sqrt[n]{u(x)}$ -$\sqrt[n]{v(x)}$<=>g(x)=u(x)-v(x) при нечётном n*** и ***f(x)=$\sqrt[n]{u(x)}$ -$\sqrt[n]{v(x)}$<=>g(x)=u(x)-v(x), где D(g) определяется системой неравенств $\begin{cases} u(x) \ge 0, \\ v(x) \ge 0 \end{cases}$ при чётном n.***

Пример: $\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \le 0$.

Решение

$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{1}-\sqrt{x+2}} \le 0,$

$$\begin{cases} \dfrac{4-(x+2)}{1-(x+2)} \le 0, \\ x+2 \ge 0; \end{cases}$$

$\frac{x-2}{x+1} \le 0$, далее применяем метод интервалов.

Ответ: (-1; -2].

4) ***f(x)=$\boldsymbol{log_a u(x) - log_a v(x)}$ при a>1<=>$\boldsymbol{g(x) = u(x) - v(x)}$, где D(g) определяется системой неравенств*** $\begin{cases} \boldsymbol{u(x) > 0}, \\ \boldsymbol{v(x) > 0}. \end{cases}$

Суть метода состоит в приведении логарифмов неравенства к любому основанию, большему 1, и применению равносильного преобразования.

Пример: $\frac{log_2(2x^2-13x+20)-1}{log_3(x+7)} \le 0$

Решение

$\frac{log_2(2x^2-13x+20)-1}{log_3(x+7)-0} \le 0,$

$\frac{log_2(2x^2-13x+20)-log_2 2}{log_3(x+7)-log_3 1} \le 0,$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-13x+18}{x+6} \le 0, \\ 2x^2-13x+20 > 0, \\ x+7 > 0. \end{cases}$$

Далее применяем метод интервалов. Ответ: (-7; -6)∪[2; 2,5) ∪(4; 4,5].